5. Problema de Transporte

O Problema de Transporte é talvez o mais representativo dos Problemas de Programação Linear. É um problema de grande aplicação prática, tendo sido estudado por vários investigadores, embora tenha sido Dantzig o primeiro a estabelecer a sua formulação em PL e a propor um método sistemático de resolução.

O problema geral de transporte consiste em determinar a forma mais eficiente, isto é, mais económica de enviar um bem disponível em quantidades limitadas em determinados locais para outros locais onde é necessário. Como qualquer problema de PL, este pode ser resolvido pelo método do *simplex*.. Porém a sua estrutura particular, permitiu a utilização de métodos que embora derivados do *simplex*, são bastante mais eficientes.

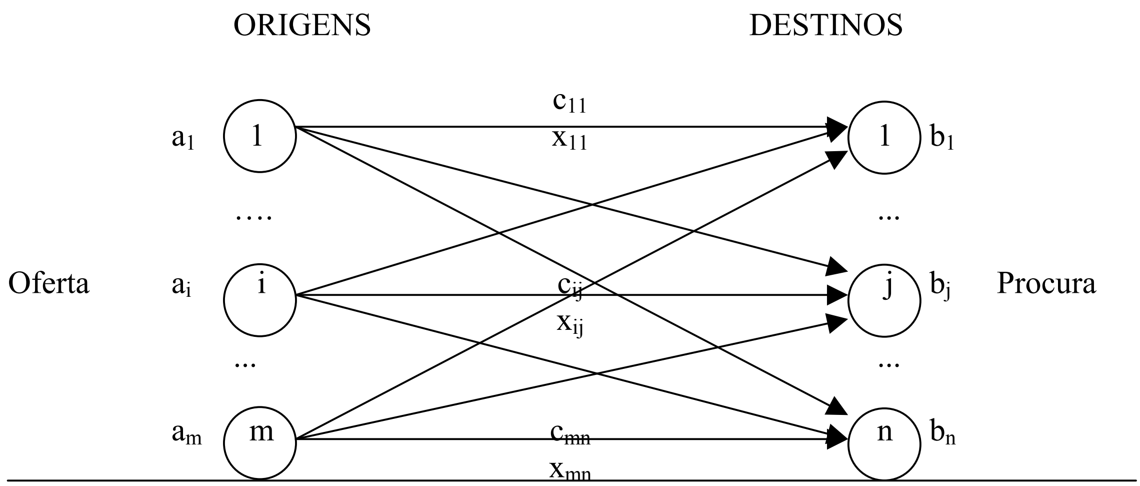
A resolução de um problema de transporte, envolve basicamente três etapas: a 1ª consiste em encontrar uma solução básica inicial; na 2ª procede-se ao teste para verificar se essa solução é óptima ou não; finalmente esta fase consiste na passagem desta solução a outra melhor, caso exista evidentemente.

5.1. Formulação

O problema clássico de transporte surge como necessidade de programar a distribuição óptima de um produto que:

1. se encontra disponível em m origens nas quantidades fixas ai>0 (oferta), com i=1,2,...,m.
2. é necessário em n destinos nas quantidades fixas $b_j>0$ (procura), com j=1,2,...,n;
3. deve ser enviado directamente para os destinos, esgotando as disponibilidades em cada origem e satisfazendo as necessidades em cada destino, isto é, a procura total iguala a oferta total;

e tendo por objectivo a minimização do custo total envolvido no programa de distribuição desse produto, em que se supõe que os custos unitários de transporte de cada origem para cada destino, c_{ij}, são independentes das quantidades transportadas, x_{ij}.



Esta figura ilustra o problema de transporte sob a forma de uma rede com m origens e n destinos representados por nós; os arcos que ligam as origens aos destinos representam os percursos através dos quais o produto pode ser transportado.

No quadro seguinte pode ver-se que em cada linha está a informação relativa a uma origem, e cada coluna a um destino. A última coluna contém informação relativa às quantidades disponíveis nas origens e a última linha contém informação referente às quantidades necessárias nos destinos. Em cada quadrícula (i,j), encontra-se a quantidade a transportar da origem i para o destino j, x_{ij}, e o correspondente custo unitário de transporte, c_{ij}.

Para qualquer plano de transporte admissível a soma em linha dos x_{ij} iguala a quantidade a_i, $\sum_j x_{ij} = a_i$ e a soma dos x_{ij} iguala a quantidade b_j, $\sum_i x_{ij} = b_j$. O custo do percurso (i,j) é dado por $c_{ij} \times x_{ij}$, pelo que o custo total do plano de transporte é dado por $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$.

Origem \ Destino	1	2	...	n	OFERTA
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{m3} x_{mn}	a_m
PROCURA	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_i$

A formalização matemática do problema de transporte como problema de programação linear vem então:

Minimizar $z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

Sujeito a

$$\sum_j x_{ij} = a_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \qquad \textit{restrições de oferta}$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad (j = 1,2,\ldots,m) \qquad \textit{restrições de procura}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$$

Exemplo

Certa empresa possui dois armazéns, A1 e A2, onde dispõe de 100 e 50 unidades de determinado produto, respectivamente, com o que abastece três mercados, M1, M2 e M3, que consomem 80, 30 e 40 unidades. Sabendo que os custos de transporte são dados no quadro

	M1	M2	M3
A1	5	3	2
A2	4	2	1

A formalização do problema – minimização do custo total de transporte – vem:

Minimizar $z = 5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 2x_{22} + x_{23}$
sujeito a

$$
\begin{array}{llllllll}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & = & 100 \\
 & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & = & 50 \\
x_{11} & & & +x_{21} & & & = & 80 \\
 & x_{12} & & & +x_{22} & & = & 30 \\
 & & x_{13} & & & +x_{23} & = & 40 \\
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \; i = 1,2; j = 1,2,3.$$

As variáveis de decisão, x_{ij} (mn=3.2=6), são as quantidades a enviar da origem i para o destino j; as duas primeiras restrições referem-se à oferta e indicam que cada origem (armazém) sai exactamente a quantidade disponível; as três restrições seguintes significam que os destinos (mercados) vão ser abastecidos exactamente das quantidades que precisam; quanto às restrições de não negatividade, têm o seu significado habitual.

Devido à sua estrutura particular, o problema de transporte goza de algumas propriedades.

Teorema 1: O problema de transporte tem sempre solução óptima (finita).

Teorema 2: Qualquer solução básica admissível do problema de transporte tem no máximo (m+n-1) variáveis positivas.

Teorema 3: A matriz da base de qualquer SBA do problema de transporte é triangular.

Teorema 4: Se $a_i \; e \; b_j$ com $i = 1,2,...,m \; e \; j = 1,2,...,n$, são inteiros, então qualquer solução básica admissível tem apenas valores inteiros.

5.2. Resolução do Problema de Transporte

Como já foi dito, este problema pode ser resolvido pelo *simplex*. Contudo, a sua aplicação a esta classe de problemas é por vezes, muito trabalhosa, devido à dimensão dos mesmos. Por isso foram desenvolvidas novas técnicas específicas para o problema em causa, e cuja resolução, tal como problema de PL qualquer, passa pelos seguintes passos:

Passo 1: Obtenção de uma SBA inicial.

Passo 2: Teste de óptimo. Se a SBA em presença satisfaz o critério de óptimo, o processo termina, caso contrário, continua.

Passo 3: Melhoria da solução. Cálculo de nova SBA através da introdução na base de uma variável não básica em substituição de uma variável básica. Voltar ao passo 2.

Apresentam-se de seguida os algoritmos mais vulgares, sendo a exposição feita através da representação do problema em quadro.

5.2.1. Obtenção de uma SBA inicial

Como se afirmou, qualquer solução básica admissível de um PT tem (m+n-1) variáveis básicas. A questão que se levanta é como encontrar uma dessas soluções. Uma forma pouco eficiente consiste em fixar (mn)-(m+n-1) variáveis com o valor zero e resolver o sistema em ordem às (m+n-1) restantes. Existem contudo, métodos alternativos como por exemplo, o do Canto do Noroeste, do Mínimo da matriz de Custos, Método de Vogel, entre outros.

Método do Canto do Noroeste (NW) ou Método do Canto Superior Esquerdo

Este método é de aplicação muito fácil, mas tem um grande inconveniente que é o facto de não considerar a matriz de custos na identificação da SBA inicial.
Assim, considerando o PT na forma de quadro apresentada atrás, a variável básica escolhida é, em cada quadro, a variável situada no canto superior esquerdo, donde a designação de método do canto do NW. No primeiro quadro, a variável a tomar como básica é sempre x_{11}; no segundo quadro a variável básica escolhida será x_{12} *ou* x_{21}, consoante tenha sido traçada a coluna 1 ou a linha 1, respectivamente, e assim sucessivamente até terem sido traçadas todas as linhas e todas as colunas.

Considere-se o exemplo anterior para obter uma SBA utilizando o método do Canto do Noroeste.

Destino / Origem	1	2	3	OFERTA
1	5 x_{11}	3 x_{12}	2 x_{13}	100
2	4 x_{21}	2 x_{22}	1 x_{23}	50
PROCURA	80	30	40	150

Atribui-se a x_{11} o maior valor possível, isto é o mínimo entre a oferta da origem 1 e a procura no destino 1, $x_{11} = \min\{100{,}80\} = 80$. O destino 1 vê desta forma satisfeita a procura respectiva, por isso traça-se o resto da coluna 1, e ficam ainda disponíveis 100-80=20 unidades na origem 1. Tem-se um novo quadro.

80			~~100~~ 20
			50
~~80~~	30	40	

A escolha da nova variável recai agora sobre a que está no canto mais noroeste, ou seja, $x_{12} = \min\{20{,}30\} = 20$, ficando a origem 1 completamente esgotada. Traça-se a linha 1 e ficam por satisfazer 30-20=10 unidades no destino 2. Repete-se o procedimento no quadro.

80	20		~~100~~ ~~20~~
			50
~~80~~	~~30~~ 10	40	

Tem-se nova variável básica $x_{22} = \min\{50{,}10\} = 10$ resultando no quadro:

80	20		~~100~~ ~~20~~
	10		~~50~~ 40
~~80~~	~~30~~ ~~10~~	40	

Resta agora, apenas uma quadrícula (2,3), verificando-se obviamente, a igualdade entre a oferta e a procura, pelo que $x_{23} = 40$, esgotando-se assim, em simultâneo origem 2 e destino 3. A SBA inicial obtida é $x_{11} = 80,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 10,\ x_{23} = 40$ (m+n-1=4 variáveis básicas) e as restantes, ou seja, as não básicas iguais a zero.

O valor da FO desta solução é:

$$z = 5 \times 80 + 3 \times 20 + 2 \times 10 + 1 \times 40 = 520$$

A representação da solução no quadro é:

5 80	3 20	2	100
4	2 10	1 40	50
80	30	40	

Método do Mínimo da Matriz de Custos

Ao contrário do método anterior, o algoritmo que agora se apresenta toma em consideração a matriz de custos, $\lfloor c_{ij} \rfloor$, pelo que, em princípio, fornece soluções iniciais mais próximas da solução óptima.
Neste método, a escolha da variável a ser básica, é decidida pelo menor custo em cada quadro (em caso de empate a escolha é arbitrária).

Este método pode ainda ser particularizado, como Método do Mínimo de Matriz de Custos em Linha, ou Método do Mínimo de Matriz de Custos em Coluna.

Retome-se novamente o exemplo anterior.

O menor dos custos da matriz é c_{23} pelo que $x_{23} = \min\{50,40\} = 40$. O destino 3, fica satisfeito, traçando-se a respectiva coluna, e ficam disponíveis 50-40=10 unidades na origem 2. Tem-se:

5	3	2	100
4	2	1 40	~~50~~ 10
80	30	40	

Para escolher a nova variável básica, procura-se outra vez o menor custo que é c_{22}, pelo que $x_{22} = \min\{10,30\} = 10$, ficando assim esgotada a origem 2, e ficando ainda em falta no destino 2, 30-10=20 unidades.

5	3	2	100
4	2 10	1 40	~~50~~ ~~10~~
80	~~30~~ 20	40	

Agora procura-se outra vez o menor custo que é o $c_{12} = 3$, pelo que $x_{12} = \min\{20,100\} = 20$. Isto significa que o destino 2 fica completamente satisfeito, mas a origem 1 ainda tem 100-20=80 unidades.

5	3 20	2	~~100~~ 80
4	2 10	1 40	~~50~~ ~~10~~
80	~~30~~ ~~20~~	40	

Resta agora $x_{11} = \min\{80,80\} = 80$, muito embora com um custo alto, 5, onde se tem a oferta igual à procura, pelo que ficam esgotadas as linha e coluna correspondentes.

A solução que se apresenta é a seguinte:

5 80	3 20	2	100
4	2 10	1 40	50
80	30	40	

Por coincidência esta solução é igual à obtida pelo Canto Superior Noroeste, com custo igual a 520.

Método de Vogel

Este método tem em geral melhores resultados do que os dois métodos anteriores, uma vez que a escolha feita para variável básica, é em cada quadro o de menor custo da linha ou coluna associada à maior das diferenças entre os dois menores custos de cada linha e de cada coluna.

Para aplicação deste método é útil acrescentar uma linha e uma coluna ao quadro para se escreverem as diferenças entre os dois menores custos de cada linha e de cada coluna.

5	3	2	100	3-2=1
4	2	1	50	2-1=1
80	30	40		
5-4=1	3-2=1	2-1=1		

Neste caso há empate em toas as diferenças pelo que arbitrariamente vou escolher a 2ª coluna, isto é, o 2º destino, e aí, a variável de menor custo é $x_{22} = \min\{30,50\} = 30$. O 2º destino fica esgotado, e na origem 2 há ainda 50-30=20 unidades. Voltam a calcular-se as diferenças para as linhas e colunas, tendo em atenção as quadrículas que já estão esgotadas.

5	3	2	100	5-2=3
4	2 30	1	~~50~~ 20	4-1=3
80	~~30~~	40		
5-4=1		2-1=1		

Escolhe-se a maior diferença, e de novo há empate para ambas as linhas. Arbitrariamente escolhe-se a linha 1 (origem 1), cuja variável de menor custo é $x_{13} = \min\{40,100\} = 40$, ficando assim esgotado o 3º destino.

5	3	2 40	~~100~~ 60
4	2 30	1	~~50~~ 20
80	~~30~~	~~40~~	

5-4=1

Agora vai-se afectar à variável $x_{21} = \min\{80,20\} = 20$, e restam depois 60 unidades para x_{11} obrigatoriamente.

5 60	3	2 40	100
4 20	2 30	1	50
80	30	40	

Esta solução, tem custo igual a 520. Note-se que é diferente das obtidas pelos outros dois métodos mas em termos de custo é exactamente igual.

5.2.2. Obtenção da solução óptima

Obtida uma SBA inicial, esta é submetida ao teste de óptimo, passando-se em seguida a outra solução caso o critério respectivo não seja satisfeito; o processo repete-se até obtenção da solução óptima.

O método que vamos aprender é baseado na solução dual, e foi desenvolvido por Dantzig. Os resultados da dualidade vão servir para calcular os custos reduzidos ($z_{ij} - c_{ij}$) do problema primal de transporte. A análise destes valores permite concluir se a SBA que temos é óptima ou não.

A primeira coisa a fazer, é determinar a solução dual (u,v) para as <u>variáveis básicas</u> tais que $u_i+v_j-c_{ij}=0$ ou seja, tal que $u_i+v_j=c_{ij}$.

Para efeito, vamos construir um quadro auxiliar para obter os valores de (u,v). Começamos por atribuir o valor zero, arbitrariamente a um dos valores de u, para depois podermos determinar os outros valores de u e de v, de tal modo que se verifique a relação $u_i+v_j=c_{ij}$

Por exemplo, pegando na solução admissível inicial obtida no exemplo anterior tem-se:

5 60	3	2 40	100
4 20	2 30	1	50
80	30	40	

Para construir a solução dual faz-se o seguinte quadro:

ui \ vj			
	5		2
	4	2	

Note-se que se escrevem os custos nas quadrículas das variáveis básicas, e agora determinamos a solução de tal forma que $u_i+v_j=c_{ij}$ se verifique. Para tal vamos atribuir o valor zero a u1, por exemplo, e o resto da solução já pode ser calculada tendo por base a relação anterior.

ui \ vj	5+0=5 5	3+(-1)=2 3	2+0=2 2
→ 0	**5**	3+0= 3	**2**
5+(-1)=4 -1	**4**	**2**	-1+2= 1

A questão que se coloca agora é se esta é ou não a solução óptima.

Se $z_{ij}-c_{ij}<=0$ (problema de mínimo...)estamos no óptimo. ($z_{ij}-c_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$)

Para isso vamos testar se $u_i+v_j>c_{ij}$, apenas para as variáveis não básicas, porque para as básicas tem-se $u_i+v_j-c_{ij}=0$. Se para alguma variável se verificar esta relação, significa que não estamos no óptimo e o processo tem de continuar.

Neste caso vai-se ver se $u_1+v_2>c_{12}$ que é equivalente a dizer 3>3, o que é falso. Para o caso de $u_1+v_3>c_{13}$ é o mesmo que 1>1 que também é falso, pelo que o critério de óptimo está verificado, uma vez que para todas as variáveis de tem $z_{ij}-c_{ij}<=0$.

Vamos supor que esta solução não era óptima. Era preciso escolher uma variável para entrar para a base de entre as candidatas a entrar. As candidatas a entrar para a base são aquelas que estão a violar o critério de óptimo, isto é, aquelas tais que $u_i+v_j>c_{ij}$. A que deve entrar, é aquela que viola mais este critério ou seja, entra a variável que corresponda ao $\max(u_i+v_k-c_{ik})$.

Depois de escolhida a variável que vai entrar temos de escolher outra para sair, e a que vai sair depende da existência de ciclo no quadro da última solução encontrada. Começamos por colocar o símbolo θ, no sítio da variável que vai entrar, e depois com sinais de – e + alternados, formamos um ciclo na matriz com -θ e +θ, tendo como origem e fim o θ correspondente à variável que entrou.

Sairá da base a variável que tiver o menor valor dos -θ associados, e esse valor vai ser o valor com que a variável entra na base, recalculando-se de seguida toda a nova solução.

Vai-se verificar novamente se é óptima construindo para isso a nova solução do dual que lhe está associada.

Vejamos o processo através de um exemplo.

EXEMPLO

Aplicação do algoritmo de transportes

1) Encontrar SBA inicial (por um dos métodos vistos)
2) Aplicar o método dual para encontrar até encontrar a solução óptima

Considere-se o seguinte problema cuja matriz de custos e a oferta e procura nas origens e nos destinos são os seguintes:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 5 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 6 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

a_i	7	9	11		
b_j	4	6	4	8	5

A primeira SBA foi determinada pelo método do canto superior esquerdo e é a seguinte:

	1	2	3	4	5	a_i
1	4	3				7
2		3	4	2		9
3				6	5	11
b_j	4	6	4	8	5	

O seu custo é igual a z=4.7+3.9+3.4+4.6+2.7+6.5+5.7=170

Para sabermos se é óptima vamos calcular uma solução dual que lhe esteja associada.

u_i \ v_j	2	4	6	7	9
5	**7**	**9**			
0		**4**	**6**	**7**	
-2				**5**	**7**

Os valores escritos a **bold**, são os c_{ij}, das variáveis básicas da solução anterior

Vamos supor, por exemplo $u_2=0$.
Se $u_2=0$, então v_2 tem de ser igual a 4, $v_3=6$ e $v_4=7$.

Como $v_2=4$, vem $u_1=5$.
Como $c_{34}=5$ e $v_4=7$ temos que ter $u_3=-2$.

Se $u_3=-2$, $v_5=9$.

Agora pode-se preencher o resto do quadro anterior, fazendo a soma dos ui com os vi. Estes cálculos devem ser efectuados no quadro anterior, mas por uma questão de simplificação, vai ser feito neste exemplo de seguida:

u_i \ v_j	2	4	6	7	9
5	**7**	**9**	11	12	14
0	2	**4**	**6**	**7**	9
-2	0	2	4	**5**	**7**

Vamos ver se esta solução é óptima. Para isso, testamos se $z_{ij}-c_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}\leq 0$, que é o mesmo que fazer o seguinte teste para todas as variáveis $u_i+v_j\leq c_{ij}$

Isto quer dizer que, para as <u>variáveis não básicas</u>, tem de se fazer um teste em relação aos valores obtidos no último quadro (u_i+v_j) com os valores de c_{ij}. Para as variáveis básicas não é preciso, porque sabemos que para estas se tem $u_i+v_j-c_{ij}=0$.

$u_1+v_3=11>c_{13}=5$ viola o criterio de óptimo
$u_1+v_4=12>c_{14}=3$ viola o criterio de óptimo
$u_1+v_5=14>c_{15}=6$ viola o criterio de óptimo

$u_2+v_1=2<c_{21}=6$ não viola o critério de óptimo
$u_2+v_5=9>c_{25}=9$ viola o criterio de óptimo

$u_3+v_1=0<c_{31}=8$ não viola o critério de óptimo
$u_3+v_2=2<c_{32}=6$ não viola o critério de óptimo
$u_3+v_3=4=c_{33}$ não viola o critério de óptimo

Das variáveis que estão a violar o critério de óptimo, vamos ver qual é a que está a violar mais, ou seja

$$\max\{11-5,12-3,14-6,9-5\}=\max\{6,9,8,4\}=9$$

que corresponde à variável x14, sendo esta <u>que entra.</u>

Como entra x_{14}, coloca-se neste quadro, θ, para indicar essa entrada.
De seguida vai-se procurar um ciclo que começa em x_{14} e termina em x_{14}, alternando com $-\theta$ e $+\theta$.

	1	2	3	4	5	a_i
1	4	3		θ		7
2		3	4	2		9
3				6	5	11
b_j	4	6	4	8	5	

	1	2	3	4	5	a_i
1	4	$3-\theta$		θ		7
2		$3+\theta$	4	$2-\theta$		9
3				6	5	11
b_j	4	6	4	8	5	

Como temos ciclo, o processo pode continuar porque temos uma variável que pode sair para dar entrada a x_{14}. A variável que sai da base vai ser obtida através do $\min\{x_{12},x_{24}\}=\min\{3,2\}=2$, pelo que $\theta=2$, saindo x_{24}. (faz-se o mínimo só para as variáveis cujo θ é negativo)

Recalculando o quadro anterior tem-se

	1	2	3	4	5	a_i
1	4	1		2		7
2		5	4			9
3				6	5	11
b_j	4	6	4	8	5	

Esta é a nova solução básica (primal), constituída por 7 variáveis diferentes de zero.
Vamos de novo calcular a solução dual que lhe está associada, supondo para começar que $u_1=0$. O resto vem:

u_i \ v_j	7	9	11	3	5
0	**7**	**9**	11	**3**	5
-5	2	**4**	**6**	-2	0
2	9	11	13	**5**	**7**

Está no óptimo? Isto é, $z_{ij}-c_{ij}\leq 0$? Não.

Variável que entra $\max\{11-5,9-8,11-6,13-4\}=9$, pelo que a variável que entra é x_{33}.

	1	2	3	4	5	a_i
1	4	$1-\theta$		$2+\theta$		7
2		$5+\theta$	$4-\theta$			9
3			θ	$6-\theta$	5	11
b_j	4	6	4	8	5	

A variável que sai, vai ser obtida pelo $\min\{1, 2,4,6\}=1$, que corresponde à variável x_{12}.

	1	2	3	4	5	a_i
1	4			3		7
2		6	3			9
3			1	5	5	11
b_j	4	6	4	8	5	

A nova solução dual é:

u_i \ v_j	9	2	4	5	7
-2	**7**	0	2	**3**	5
2	11	**4**	**6**	7	9
0	9	2	**4**	**5**	**7**

Nota: Comecei por supor que u_3=0.

Esta solução ainda não está no óptimo. Tem-se max{9-5,11-6,9-8}=5, pelo que a variável que entra para a base é x_{21}.

	1	2	3	4	5	a_i
1	4-θ			3+θ		7
2	θ	6	3-θ			9
3			1+θ	5-θ	5	11
b_j	4	6	4	8	5	

A variável que sai: min{4,3,5}=3, pelo que sai x_{23}, com θ=3.

	1	2	3	4	5	a_i
1	1			6		7
2	3	6				9
3			4	2	5	11
b_j	4	6	4	8	5	

A nova solução do dual é:

u_i \ v_j	9	7	4	5	7
-2	**7**	5	2	**3**	5
-3	**6**	**4**	1	2	4
0	9	7	**4**	**5**	**7**

Como ainda não está no óptimo, faz-se max{9-8,7-6}=1, pelo que a variável que entra é x_{31}.

	1	2	3	4	5	a_i
1	1-θ			6+θ		7
2	3	6				9
3	θ		4	2-θ	5	11
b_j	4	6	4	8	5	

Faz-se min{1,2}=1, pelo que sai x11, e θ=1.

Vem

	1	2	3	4	5	a_i
1				7		7
2	3	6				9
3	1		4	1	5	11
b_j	4	6	4	8	5	

A solução dual que lhe corresponde é

u_i \ v_j	8	6	4	5	7
-2	6	4	2	**3**	5
-2	**6**	**4**	2	3	5
0	**8**	6	**4**	**5**	**7**

Neste caso temos $z_{ij}-c_{ij}\leq 0$ para todas as variáveis, pelo que a solução é óptima.

Tem-se
$x_{14}=7$
$x_{21}=3$ $x_{22}=6$
$x_{31}=1$ $x_{33}=4$ $x_{34}=1$ $x_{35}=5$

Custo= $7\times 3+3\times 6+6\times 4+1\times 8+4\times 4+1\times 5+5\times 7=127$.

5.3. Considerações Adicionais ao Problema de Transportes

5.3.1.Oferta total diferente da procura total

O problema de transportes, foi formalizado e resolvido pressupondo que as quantidades disponíveis nas origens, isto é, o seu total, é igual às necessidades nos destinos. Esta é uma condição imprescindível para se resolver os problemas de transportes. Contudo, esta hipótese nem sempre se verifica, podendo existir mais procura do que oferta, ou mais oferta do que procura. Quando acontece uma situação destas, de desequilíbrio, o que se faz é tornar o sistema equilibrado novamente.

Assim, se a oferta for superior à procura, ou seja $\sum a_1 > \sum b_j$, criamos um destino fictício, ficando a matriz de custos com mais uma coluna de custos nulos, e tal que a quantidade do novo destino é igual a $\sum a_i - \sum b_j$.

Se for a oferta for inferior à procura, $\sum a_i < \sum b_j$, criamos uma origem fictícia, ficando a matriz de custos com mais uma linha de custos nulos, e em que a quantidade que é oferecida nessa origem é igual a $\sum b_j - \sum a_i$.

O resto do processo de resolução é o mesmo que para os casos equilibrados, a única atenção a ter é em relação à interpretação da solução óptima. Se por exemplo tivermos um destino fictício, e existir transporte de uma origem para esse destino, isso não significa que esse transporte se faz efectivamente, mas sim que na origem ficam em armazém as quantidades que lhe estão afectas na solução.

5.3.2. Percursos impossíveis

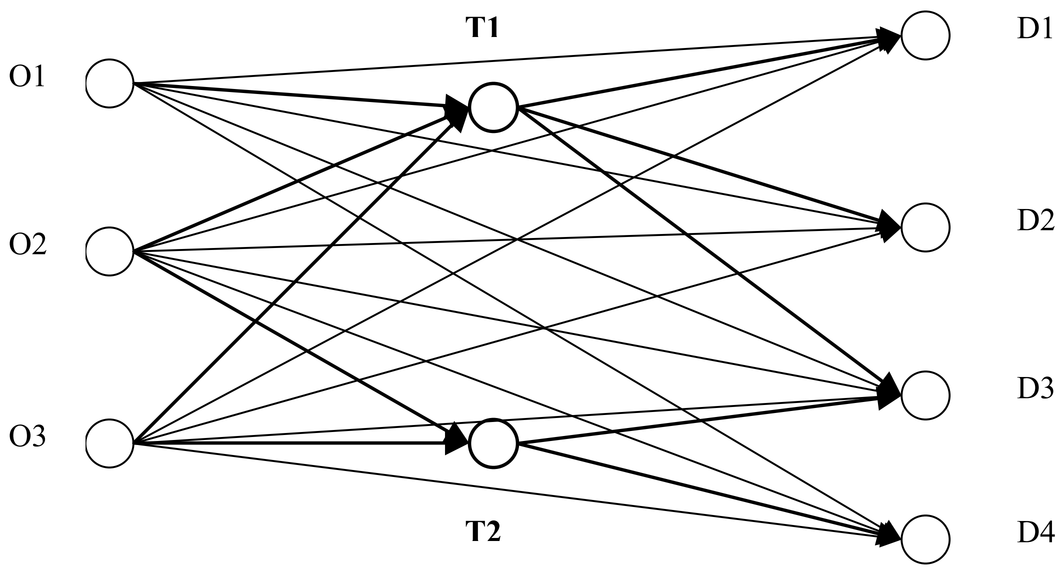
Podem ocorrer situações em que seja impossível fazer o transporte de algumas origens para alguns destinos. Nestes casos, podemos ainda aplicar as técnicas de resolução do problema de transporte, bastando só, penalizar esses percursos, com um M arbitrariamente grande, fazendo c_{ij}=M. Tal como no método das penalidades (do M grande) no método do *simplex*, também aqui a resolução manual dispensa a atribuição de valores concretos a M. No caso da solução óptima contemplar algum dos percursos impossíveis, isso significa que o problema original é mesmo impossível.

5.4. Problema de Transfega

No Problema de Transporte visto até aqui, as origens enviam o produto directamente para os destinos, excluindo a possibilidade de haver pontos intermédios, porque se admitiu que o melhor percurso é o que corresponde à ligação directa origem-destino. Contudo, é vantajoso considerar que podem existir pontos de passagem, isto é entrepostos, que podem ser cumulativamente origens e destinos.

Diz-se que se tem um problema de Transfega (Transexpedição) quando se pretende minimizar o custo total de transporte entre n pontos, origens, destinos e entrepostos, contemplando todas as hipóteses de transporte possíveis, sendo conhecidas as quantidades disponíveis em cada origem e necessárias em cada destino e a matriz de custos.

Suponhamos o seguinte exemplo com 3 origens, 4 destinos e 2 pontos de transfega, e os percursos possíveis:



As matrizes de custos, e as quantidades oferta/procura são as seguintes:

$$\begin{array}{c} \\ O1 \\ O2 \\ O3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D1 & D2 & D3 & D4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ O1 \\ O2 \\ O3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & - \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ T1 \\ T2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D1 & D2 & D3 & D4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & - \\ - & - & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Obs: Os – significam percurso impossível

a_i	6	8	10	
b_i	4	6	8	6

Para ser possível resolver o problema pelo algoritmo dos transportes, é necessário construir uma matriz de custos aumentada, isto é, onde apareçam os custos de todas as "origens" para todos os "destinos".

Assim, vamos considerar os pontos de transfega, simultaneamente origens e destinos, cuja quantidade disponível enquanto origem, é igual à soma das quantidades disponíveis nas diversas origens, e a quantidade necessária é também igual à soma das quantidades pedidas nos diversos destinos.

Resulta a seguinte matriz aumentada:

$$\begin{array}{c} \\ O1 \\ O2 \\ O3 \\ T1 \\ T2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} D1 & D2 & D3 & D4 & T1 & T2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:cc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & - \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 & - & 0 & - \\ - & - & 1 & 2 & - & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Note-se que entre T1 e T1, e entre T2 e T2, os custos são logicamente iguais a 0, e entre T1 e T2, T2 e T1, ou seja, entre os pontos de transfega não é possível fazer o percurso.

Quanto às quantidades necessárias/pedidas, uma vez aumentada a matriz de custos, também é necessário aumentar a matriz de quantidades, ou seja

origens	O1	O2	O3	T1	T2	
a_i	6	8	10	24	24	
b_j	4	6	8	6	24	24
destinos	D1	D2	D3	D4	T1	T2

Quanto aos percursos impossíveis, para podermos resolver o problema, vamos utilizar um custo suficientemente grande, M, de forma a que as soluções do problema não utilizem essas ligações, uma vez que se pretende minimizar o custo de transporte total, não devemos utilizar as ligações cujo custo seja demasiado elevado.

Desta forma a nossa matriz de custos inicial será

$$
\begin{array}{c}
 \\ O1 \\ O2 \\ O3 \\ T1 \\ T2
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} D1 & D2 & D3 & D4 & T1 & T2 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc:cc}
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & M \\
5 & 4 & 3 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 \\
\hdashline
1 & 1 & 2 & M & 0 & M \\
M & M & 1 & 2 & M & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Estamos agora em condições de utilizar um dos métodos vistos no Problema de Transporte para encontrar a SBA inicial.

Utilizando o método do Canto Superior Esquerdo,

4	2					~~6~~ ~~2~~
	4	4				~~8~~ ~~4~~
		4	6			~~10~~ ~~6~~
				24		~~24~~
					24	~~24~~
4	~~6~~ ~~4~~	~~8~~ ~~4~~	~~6~~	~~24~~	~~24~~	

Repare-se que por acaso, ao construir esta solução, não foi preciso utilizar quadrículas (variáveis) cujos percursos são impossíveis. Se tal acontecesse, essa variável não poderia ser utilizada, e passávamos à do canto superior esquerdo seguinte.

Esta solução, não é básica admissível porque uma SBA tem de ter m+n-1 variáveis básicas, ou seja, 10 variáveis básicas. Como só encontrámos 8, vamos escolher 2 quaisquer com valor zero.

Por exemplo,

4	2					~~6~~ ~~2~~
	4	4				~~8~~ ~~4~~
		4	6	0		~~10~~ ~~6~~
		0		24		~~24~~
					24	~~24~~
4	~~6~~ ~~4~~	~~8~~ ~~4~~	~~6~~	~~24~~	~~24~~	

Esta escolha é arbitrária, mas tem de se ter em conta que não se escolham variáveis cujos percursos sejam impossíveis.

Finalmente, para saber se esta solução é óptima ou não, resolve-se por exemplo, pelo método do dual visto para o problema de transporte.

5.5. Caso real

Problema de Transporte

A empresa African, S.A. tem negócios em diversos países africanos como Angola, Moçambique, Cabo Verde, São Tomé, Ruanda e África do Sul. A sua actividade de *trading* traduz-se na compra de medicamentos em Laboratórios Europeus, nomeadamente na Holanda, Itália, Bélgica e também Portugal, e sua venda nos países africanos mencionados.
No próximo mês, a empresa terá de fazer um planeamento mais cuidado das encomendas de um kit de primeiros socorros para todos os países mencionados, uma vez que surgiu inesperadamente uma certa falta de oferta do mesmo produto, nos laboratórios onde normalmente se abastece. A empresa pretende portanto decidir onde encomendar e para onde enviar esse produto, tendo como objectivo principal a máxima poupança de custos de transporte e expedição do produto de uns países origens para os países destino.
O quadro que se segue apresenta os custos de transporte e expedição por contentos enviado para todos os "caminhos" alternativos, bem como as disponibilidades de cada laboratório para o próximo mês, e as necessidades de cada mercado cliente.

	África do Sul	Angola	Cabo Verde	Moçambique	São Tomé	Ruanda	Disponibilidades
Holanda	300	350	450	250	500	300	20
Bélgica	200	250	350	200	400	350	15
Itália	450	300	450	400	560	250	20
Portugal	350	250	400	300	200	500	5
Necessidades	15	15	5	10	5	15	

Problema de transfega

Consideremos o problema anterior e suponhamos que qualquer navio que viaje da Europa para África tem de passar por um "porto de fiscalização" imposto por normas de direito internacional relativas a comércio de apoio a países em desenvolvimento. Os portos alternativos por onde os navios podem passar são Durbin, Gibraltar e Casablanca, aos quais correspondem os seguintes custos de transporte desde os diversos países origem e até aos diversos países destino:

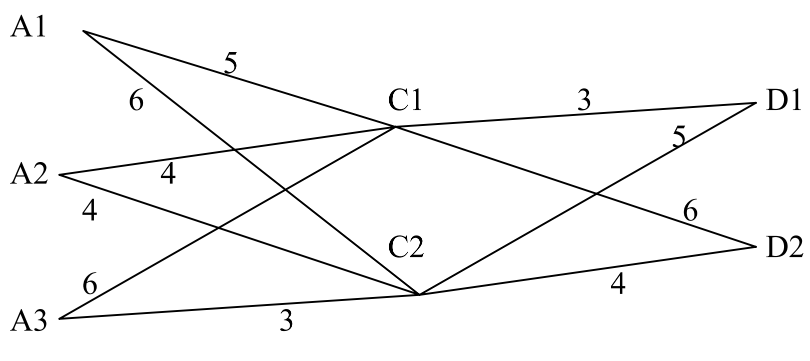
ORIGEM	PORTO			
	Gibraltar	Durbin	Casablanca	Disponibilidades
Holanda	100	550	350	20
Bélgica	150	350	250	15
Itália	50	500	350	20
Portugal	50	450	300	5

PORTO	DESTINO				
	África do Sul	Angola	Cabo Verde	Moçambique	São Tomé
Gibraltar	400	250	250	450	300
Durbin	10	250	350	300	400
Casablanca	250	50	150	400	360
Necessidades	15	15	5	10	5

(*in* Investigação Operacional Vol.1 Programação Linear; Edições Sílabo)

5.6. Exercício proposto

Resolva pelo algoritmo dos transportes, o seguinte problema de Transfega.



origens	A1	A2	A3
disponibilidades	10	10	15

destinos	D1	D2
necessidades	10	25

Solução:

$x_{13} = 10 \quad x_{14} = 0 \quad x_{24} = 10 \quad x_{34} = 15 \quad x_{41} = 10 \quad x_{43} = 25 \quad x_{52} = 25 \quad x_{54} = 10$